

## MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 4

1. Spočítejte limity (nebo ukažte, že daná posloupnost limitu nemá):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2+n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n - 2n!}{n^4 + 3n^n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, \quad a > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sin n}{n + \cos n};$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} \right).$$

2. Podrobně sepište důkazy aspoň jednoho z následujících tvrzení:

a) Necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$  a necht' platí  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$ . Potom také  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

b) Je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a > 0$ , pak je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ . A zvažte, zda tvrzení platí i pro  $a=0$  ( $a_n > 0$ ).

A užití: Určete  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ . (Tuto limitu zkuste spočítat i užitím věty o limitě sevřené funkce).

3. Vyšetření konvergence rekurentně definované posloupnosti:

Definujme rekurentně posloupnost  $(a_n)$ , kde  $a_1 = 10$ ,  $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ . Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ .

(Návod: ukažte, že daná posloupnost je klesající, zdola omezená)

4. A k přemýšlení o cauchyovských posloupnostech:

a) Opakování definice: ukažte dle definice, že posloupnost  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$  je cauchyovská.

b) Necht' posloupnost  $(a_n)$  je cauchyovská a  $(a_{k_n})$  je podposloupnost posloupnosti  $(a_n)$  a necht'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a. \quad \text{Potom také} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

### Dobrovolně:

5. Promyslete a pokuste se dokázat

a) Je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a, a < 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(analogicky k tvrzení z „písemného cvičení: je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, a < 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ );

b) Je-li  $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a, a > 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

c) Je-li  $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a, a > 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

6. A ukažte si, jak snadno se pomocí tvrzení z příkladu 5 dokáže, že:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0$ ; c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$  ( $a > 1$ )

(„základní“ limity, je „dobré“ je znát).

**A nakonec trošku o nekonečných řadách:**

1. Pokuste se sečíst řadu:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n}$  ; b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  ;

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$  (Rada: rozložte zlomek  $\frac{1}{4n^2 - 1}$  na rozdíl dvou zlomků).

2. Ukažte, že divergují řady (užitím nutné podmínky konvergence řad):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ; \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^2 ; \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} .$$